第 42 卷 第 1 期
2025 年 2 月

应 用 力 学 学 报
Chinese Journal of Applied Mechanics

Vol. 42 No. 1
Feb. 2025

DOI:10.11776/j.issn.1000-4939.2025.01.016

考虑弹簧型不完美界面的一维正交准晶有效弹性性能研究

武雨润[1],李璐[1],李联和[1,2,3]

(1.内蒙古师范大学数学科学学院,010022 呼和浩特;2.内蒙古自治区应用数学中心,010022 呼和浩特;
3.无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室,010022 呼和浩特)

摘 要:基于弹簧型不完美界面的 Mori-Tanaka 方法,研究了一维正交准晶复合材料有效弹性性能问题。给出了声子场、相位子场与声子-相位耦合场有效弹性常数的显式表达式。特别地,详细讨论了夹杂的长径比与体积分数对准晶复合材料有效弹性常数的影响。结果表明,考虑不完美界面使有效弹性常数一定程度上变小了。

关键词:弹簧型不完美界面;一维正交准晶;Mori-Tanaka 方法;夹杂

中图分类号:O343 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-4939(2025)01-0149-08

Study on the effective elastic properties of one-dimensional orthogonal quasicrystals considering spring-type imperfect interfaces

WU Yurun[1], LI Lu[1], LI Lianhe[1,2,3]

(1. School of Mathematics and Science, Inner Mongolia Normal University, 010022 Hohhot, China;
2. Inner Mongolia Applied mathematics Center, 010022 Hohhot, China; 3. Key Laboratory of
Infinite Dimensional Hamiltonian System and Its Algorithm Application, Ministry of Education, 010022 Hohhot, China)

Abstract: The Mori-Tanaka method based on spring-type imperfect interface used to study the effective elastic properties of one-dimensional orthogonal quasicrystal composite materials. Explicit expressions for the effective elastic constants of phonon field, phason field, and phonon-phason coupling field are given. The effects of the aspect ratio and volume fraction of inclusions on the effective elastic constants of quasicrystal composite materials are discussed in detail. The results indicate that considering imperfect interfaces reduces the effective elastic constants to some extent.

Key words: spring-type imperfect interfaces; one-dimensional orthogonal quasicrystal; the Mori-Tanaka method; inclusions

---

收稿日期:2023-08-04
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.11962026;12002175;12162027;62161045);内蒙古国家自然科学基金资助项目(No.2020MS01018;2021MS01013);内蒙古自治区高校创新研究团队项目资助项目(No.NMGIRT2317);无穷维哈密顿系统及其算法应用教育部重点实验室开放课题资助项目(No.2023KFZD02)
通信作者:李联和,教授。E-mail:nmglilianhe@163.com
引用格式:武雨润,李璐,李联和.考虑弹簧型不完美界面的一维正交准晶有效弹性性能研究[J].应用力学学报,2025,42(1):149-156.
WU Yurun, LI Lu, LI Lianhe. Study on the effective elastic properties of one-dimensional orthogonal quasicrystals considering spring-type imperfect interfaces[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2025, 42(1):149-156.

SHECHTMAN 等[1]在20世纪80年代通过观察急冷的铝锰合金电子衍射图像,意外地发现了准晶体。准晶体具有良好的力学性能[2-4],如高硬度、低塑性、耐磨、低孔隙度和低摩擦系数等,被广泛用作绝热材料、贮氢材料、表面涂层以及增强复合材料等。

准晶弹性理论的研究至今已取得了许多重要的研究成果[5-8]。其中,准晶的裂纹、位错和夹杂等问题引起了国内外众多学者和专家的广泛关注[9-15]。张亮亮[16]考虑了压电效应的一维准晶材料的基本解、Green 函数解以及单裂纹问题。FAN[17]计算了含椭球粒子的一维正交准晶复合材料的 Eshelby 张量和有效刚度。SLADEK 等[18]对静态和动态载荷下一维正交准晶板的弯曲问题进行了分析。赵雪芬等[19]探讨了在非周期平面上一维正交准晶弹性有限摩擦接触问题。因此,对于准晶夹杂问题的研究无论在工程材料领域还是物理领域都有着非常重要的作用。张之国[20]讨论了一维和二维准晶中位错、夹杂以及接触问题。翟婷等[21]研究了在点热源作用下,无限大十二次对称二维准晶基体和圆形弹性夹杂界面之间含多条裂纹的问题。GUO 等[22]考虑了含椭球夹杂的无限大一维六方压电准晶反平面问题。GAO 等[23]分析了在无限均匀负载下嵌入球状夹杂的无限大二维准晶,为深入探讨准晶复合材料提供了理论基础。

在实际工程应用中,复合材料的界面缺陷和损伤会对其降解产生影响。因此,夹杂和基体之间的界面完美结合的条件往往不足以模拟界面的物理力学行为。在评估准晶复合材料的有效弹性性能时,需要综合考虑界面的性质和结构。近年来,许多学者对考虑不完美界面的复合材料有效弹性性能问题展开了深入研究。KOUTSAWA[24-25]提出了一种新的 Mori-Tanaka 方法,可以有效地预测含有弹簧型不完美界面的多铁复合材料的有效磁电弹性,为研究含界面的准晶复合材料有效弹性性能提供了新思路。BUDIANSK[26]分析了含有不完美界面的电弹性椭球体夹杂在压电复合材料中的应用。

本研究基于弹簧型不完美界面假设和 Mori-Tanaka 理论,给出含弹簧型不完美界面的一维正交准晶复合材料有效弹性常数的显式表达式,在此基础上讨论夹杂的长径比与体积分数对准晶复合材料有效弹性性能的影响。

1 基本方程

假定一维正交准晶在 x_1-x_2 平面上呈周期性,x_3 轴为准周期轴。根据准晶线弹性理论[27-28],在不考虑体力的情况时。

平衡方程为

$$\sigma_{ij,i}=0,\quad H_{ij,i}=0 \tag{1}$$

几何方程为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}),\quad \omega_{ij}=\varpi_{i,j} \tag{2}$$

本构方程为

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}+R_{ijkl}\omega_{kl},\quad H_{ij}=R_{klij}\varepsilon_{kl}+K_{ijkl}\omega_{kl} \tag{3}$$

式中:下标中的逗号表示偏微分,下标 $i,j,k,l=1,2,3$。σ_{ij}、H_{ij} 表示声子场和相位子场的应力;ε_{kl},ω_{kl} 表示声子场和相位子场的应变;u_i,ϖ_i 表示声子场和相位子场的位移;C_{ijkl},K_{ijkl},R_{ijkl} 分别为声子场、相位子场和声子-相位耦合场的弹性常数。

为方便张量计算,引入速记符号后,式(3)可以简化为如下形式

$$\boldsymbol{\Sigma}_{iJ}=\boldsymbol{L}_{iJKl}\boldsymbol{Z}_{Kl} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{iJ}=\begin{cases}\sigma_{ij}, J=1,2,3\\ H_{3i}, J=4\end{cases} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Z}_{Kl}=\begin{cases}\varepsilon_{kl}, K=1,2,3\\ \omega_{3l}, K=4\end{cases},$$

$$\boldsymbol{L}_{iJKl}=\begin{cases}C_{ijkl}, J=K=1,2,3\\ R_{ij3l}, J=1,2,3;\ K=4\\ R_{kl3i}, J=4; K=1,2,3\\ K_{3i3l}, J=4; K=4\end{cases} \tag{6}$$

式中:$\boldsymbol{\Sigma}_{iJ}$ 为声子场和相位子场的应力张量;$\boldsymbol{Z}_{Kl}$ 为声子场和相位子场的应变张量;$\boldsymbol{L}_{iJKl}$ 为一维正交准晶体的弹性常数张量,展开可以写成矩阵形式,即

$$\boldsymbol{L}_{iJKl}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0&R_1&0&0\\ C_{12}&C_{11}&C_{13}&0&0&0&R_2&0&0\\ C_{13}&C_{13}&C_{33}&0&0&0&R_3&0&0\\ 0&0&0&C_{44}&0&0&0&R_5&0\\ 0&0&0&0&C_{55}&0&0&0&R_6\\ 0&0&0&0&0&C_{66}&0&0&0\\ R_1&R_2&R_3&0&0&0&K_3&0&0\\ 0&0&0&R_5&0&0&0&K_2&0\\ 0&0&0&0&R_6&0&0&0&K_1\end{bmatrix} \tag{7}$$

式中, $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ 。

2　基于弹簧型不完美界面的 Mori-Tanaka 方法

在本节中,讨论一个有限大的一维正交准晶 Ω^M,其中含有椭球体夹杂 Ω^i,和弹簧型不完美界面 Ω^0。如图 1 所示,夹杂的定义为

$$\Omega:\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}\leqslant 1 \tag{8}$$

式中, a_1, a_2, a_3 为椭球体夹杂的半轴长。

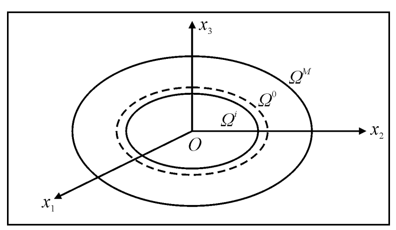


图 1　弹簧型不完美界面示意图

Fig. 1　Schematic diagram of spring-type imperfect interface

在图 1 所示的准晶复合材料三相模型中,夹杂(Ω^i)通过厚度均匀的薄界面(Ω^0)嵌入到准晶基体(Ω^M)中。假设弹簧型不完美界面模型是通过一个较薄的界面替换得到的,该界面具有跳跃关系,界面的厚度为 h 。假设界面与夹杂和基体是完美结合的,基体、夹杂和界面的弹性常数分别用 $L^{(M)}$,$L^{(i)}$ 和 $L^{(0)}$ 表示。

由于本研究考虑的是薄、软且传导性弱的界面,即弹簧型不完美界面。在这种情况下,一般的跳跃关系[24]退化为

$$[[U_J]] = hG_{AB}^0 \cdot F_J \tag{9}$$

$$[[F_J]] = 0 \tag{10}$$

式中: U_J 为位移场;$[[\ *\ ]]$表示界面跳跃算子;$[[U_J]] = U_J^{(M)} - U_J^{(i)}$ 表示界面跳跃程度; $U_J^{(i)}$ 为夹杂的位移场; $U_J^{(M)}$ 为基体的位移场。

$$F_J = \boldsymbol{\Sigma}_{iJ} n_i \tag{11}$$

$$G_{AB}^0 = (K_{AB}^0)^{-1} \tag{12}$$

$$K_{AB}^0 = C_{iABj}^0 n_i n_j \tag{13}$$

准晶基体与夹杂之间的弹簧型不完美界面具有薄、软和传导性弱等特点。在求解含有弹簧型不完美界面的一维正交准晶复合材料有效弹性常数之前,首先需要定义夹杂的平均应变张量为[24]

$$\bar{\boldsymbol{Z}}(i) = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} Z(x)\,\mathrm{d}V = \boldsymbol{a}^i : \boldsymbol{Z}^{(M)} \tag{14}$$

式中, $\boldsymbol{Z}^{(M)}$ 为基体的平均应变张量。局部张量 $\boldsymbol{a}^i$ 定义为

$$\boldsymbol{a}^i = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{T}_{iAjB} : \Delta L - \boldsymbol{T}_{iAjB} : \boldsymbol{L}^{(M)} : \boldsymbol{R}_{iAjB} : \boldsymbol{L}^{(i)}]^{-1} \tag{15}$$

式中:$\boldsymbol{I}$ 为四阶单位张量;“:”表示双点积; $\Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^{(i)} - \boldsymbol{L}^{(M)}$ 。$\boldsymbol{R}_{iAjB}$ 为界面张量,定义如下[24]

$$\boldsymbol{R}_{iAjB} = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_S hG_{AB}^0 n_i n_j \,\mathrm{d}S \tag{16}$$

$$G_{AB}^0 = (L_{iAjB}^0 n_i n_j)^{-1} \tag{17}$$

式中: L_{iAjB}^0 为弹簧型不完美界面的弹性常数。因为夹杂的体积为 $|\Omega_{\mathrm{i}}| = \frac{4\pi}{3}a_1 a_2 a_3$,椭球体夹杂在表面 S 上的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 为

$$\boldsymbol{n} = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|},\ |\bar{n}| = \sqrt{\bar{n}_i \bar{n}_i} = \frac{f(\theta,\varphi)}{a_1 a_2 a_3},$$
$$\bar{n} = \left(\frac{\sin\varphi\cos\theta}{a_1}, \frac{\sin\varphi\sin\theta}{a_2}, \frac{\cos\varphi}{a_3}\right) \tag{18}$$

$$f(\theta,\varphi) = \sqrt{a_1^2 a_2^2\cos^2\varphi + a_2^2 a_3^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + a_1^2 a_3^2\sin^2\theta\sin^2\varphi} \tag{19}$$

曲面积分 r_{iAjB} 可表示为

$$r_{iAjB} = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} hG_{AB}^0 n_i n_j f(\theta,\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{hG_{AB}^0 n_i n_j \sin\varphi}{|n|}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{20}$$

因此,$\boldsymbol{R}_{iAjB}$ 的各个分量为

$$\boldsymbol{R}_{iAjB} = \begin{cases} \frac{1}{4}(r_{iAjB} + r_{iABj} + r_{AijB} + r_{AiBj}) & (i,j,A,B = 1,2,3) \\ \frac{1}{2}(r_{iAjB} + r_{ijAB}) & (i,j,A = 1,2,3, B = 4) \\ \frac{1}{2}(r_{iAjB} + r_{iABj}) & (i,j,B = 1,2,3, A = 4) \\ \frac{1}{2}(r_{iAjB} + r_{jAiB}) & (i,j = 1,2,3, A = B = 4) \end{cases} \tag{21}$$

$\boldsymbol{T}_{iAjB}$ 为极化张量,其分量可表示为[25]

$$\boldsymbol{T}_{iAjB} = \begin{cases} \frac{1}{4}(t_{iAjB} + t_{iABj} + t_{AijB} + t_{AiBj}) & (i,j,A,B = 1,2,3) \\ \frac{1}{2}(t_{iAjB} + t_{ijAB}) & (i,j,A = 1,2,3, B = 4) \\ \frac{1}{2}(t_{iAjB} + t_{iABj}) & (i,j,B = 1,2,3, A = 4) \\ \frac{1}{2}(t_{iAjB} + t_{jAiB}) & (i,j = 1,2,3, A = B = 4) \end{cases} \tag{22}$$

$$t_{iAjB} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} n_i n_j (L^0_{kAlB} n_k n_l)^{-1} \sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \tag{23}$$

$$n_1 = \frac{\sin\varphi\cos\theta}{a_1}, n_2 = \frac{\sin\theta\sin\varphi}{a_2}, n_3 = \frac{\cos\varphi}{a_3} \tag{24}$$

对于杆状夹杂,张量 $\boldsymbol{R}_{kAlB}$ 和张量 $\boldsymbol{T}_{kAlB}$ 的解析解见附录。接下来,需要计算局部化张量 $\boldsymbol{A}^i$ 和 $\boldsymbol{A}^M$。

$$\boldsymbol{A}^M = [(1-f)\boldsymbol{I} + f(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{R}_{iAjB}:\boldsymbol{L}^{(i)}):\boldsymbol{a}^i]^{-1} \tag{25}$$

$$\boldsymbol{A}^i = \boldsymbol{a}^i:\boldsymbol{A}^M \tag{26}$$

式中,f 为椭球体夹杂的体积分数。

方程(5)中的宏观应力场可以被定义为

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = f\overline{\boldsymbol{\Sigma}}^i + (1-f)\overline{\boldsymbol{\Sigma}}^M = L^{\mathrm{Eff}}:\overline{Z} \tag{27}$$

式中:L^{Eff} 为准晶复合材料的有效弹性常数,基体与夹杂的二阶应力张量定义如下

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}^i = \boldsymbol{L}^{(i)}:\boldsymbol{A}^i:\overline{Z} \tag{28}$$

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}^M = \boldsymbol{L}^{(M)}:\boldsymbol{A}^M:\overline{Z} \tag{29}$$

通过式(27)~式(29),准晶复合材料的有效弹性常数可由下式算出[24]

$$L^{\mathrm{Eff}} = f\boldsymbol{L}^{(i)}:\boldsymbol{A}^i + (1-f)\boldsymbol{L}^{(M)}:\boldsymbol{A}^M \tag{30}$$

3 数值算例

在本节中,对含弹簧型不完美界面的一维正交准晶复合材料有效弹性常数进行了数值计算,基体、夹杂和界面的弹性常数如表 1 所示。

下面采用 Mori-Tanaka 方法与改进自洽法探讨夹杂体积分数对准晶复合材料有效弹性常数的影响。

图 2(a)~图 2(b)为声子场有效弹性常数随夹杂体积分数变化的 2 种方法对比图。在这种情况下,假设夹杂的长径比为 1,夹杂半径为 500 μm,界面的厚度为 0.02 μm。从图中可以看出,随着夹杂体积分数的增大,L^{Eff}_{1122}、L^{Eff}_{1133}、L^{Eff}_{2323} 与 L^{Eff}_{1212} 都呈现出单调递减的趋势,并且这 2 种方法的结果吻合较好。

图 2(c)为声子-相位耦合场有效弹性常数随夹杂体积分数的变化趋势图。随着夹杂体积分数的增加,有效弹性常数 L^{Eff}_{3341} 与 L^{Eff}_{3143} 均逐渐减小。

图 2(d)体现了夹杂体积分数对相位子场有效弹性常数的影响。L^{Eff}_{4343} 与 L^{Eff}_{4141} 随着夹杂体积分数的增大而单调递减,具有相同的变化规律。

表 1 一维正交准晶的弹性常数[17-18,24]

Tab. 1 Elastic constants of one-dimensional orthogonal quasicrystals[17-18,24]

材料常数	声子场/GPa	相位子场/GPa	声子-相位耦合场/GPa
基体	C^M_{11} = 234.33	K^M_1 = 12.2	R^M_1 = 8.846
	C^M_{12} = 57.41	K^M_2 = 12.2	R^M_2 = 8.846
	C^M_{13} = 66.63	K^M_3 = 2.4	R^M_3 = 8.846
	C^M_{33} = 232.22		R^M_5 = 8.846
	C^M_{44} = 70.19		R^M_6 = 8.846
	C^M_{55} = 70.19		
夹杂	C^i_{11} = 140.58	K^i_1 = 1.44	R^i_1 = 5.1
	C^i_{12} = 31.80	K^i_2 = 1.44	R^i_2 = 5.1
	C^i_{13} = 39.96	K^i_3 = 1.44	R^i_3 = 5.1
	C^i_{33} = 139.32		R^i_5 = 5.1
	C^i_{44} = 42.12		R^i_6 = 5.1
	C^i_{55} = 42.12		
界面	C^0_{11} = 0.20	K^0_1 = 0.08	R^0_1 = 0.02
	C^0_{12} = 0.04	K^0_2 = 0.08	R^0_2 = 0.02
	C^0_{13} = 0.04	K^0_3 = 0.08	R^0_3 = 0.02
	C^0_{33} = 0.2		R^0_5 = 0.02
	C^0_{44} = 0.08		R^0_6 = 0.02
	C^0_{55} = 0.08		

由此看来,当夹杂的体积分数为 0 时,准晶复合材料的有效弹性常数近似于基体的弹性常数。当夹杂的体积分数逐渐增大时,准晶复合材料的有效弹性常数趋近于夹杂的弹性常数。由于这 2 种方法的结果具有一致性,因此可验证 Mori-Tanaka 方法的有效性。

图 3(a)~图 3(b)为声子场有效弹性常数随夹杂长径比的变化趋势图。在这种情况下,设夹杂的长径比与体积分数分别为 1 和 0.5,假设界面的厚度为 0.02 μm。因此,这时的夹杂形状是球体。

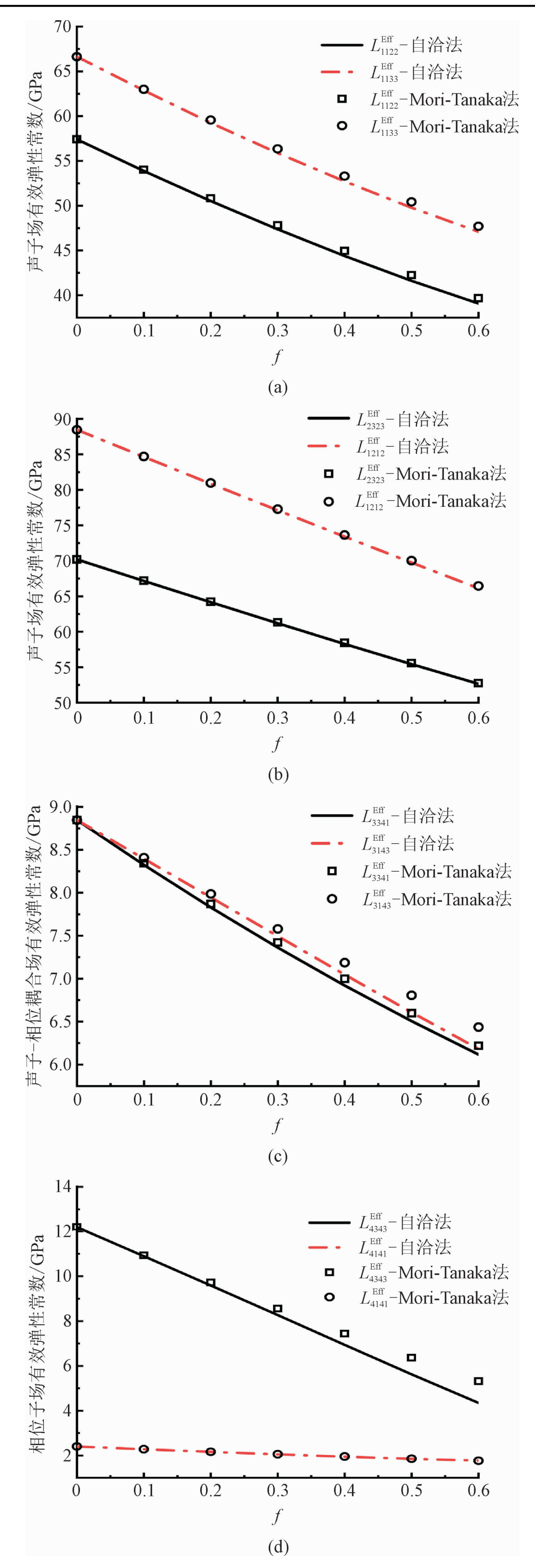


图 2　不完美界面下声子场、相位子场和声子-相位耦合场有效弹性常数随夹杂体积分数的变化

Fig. 2　The variation of effective elastic constants of phonon field, phason field, and phonon-phason coupling field with the volume fraction of inclusions under imperfect interfaces

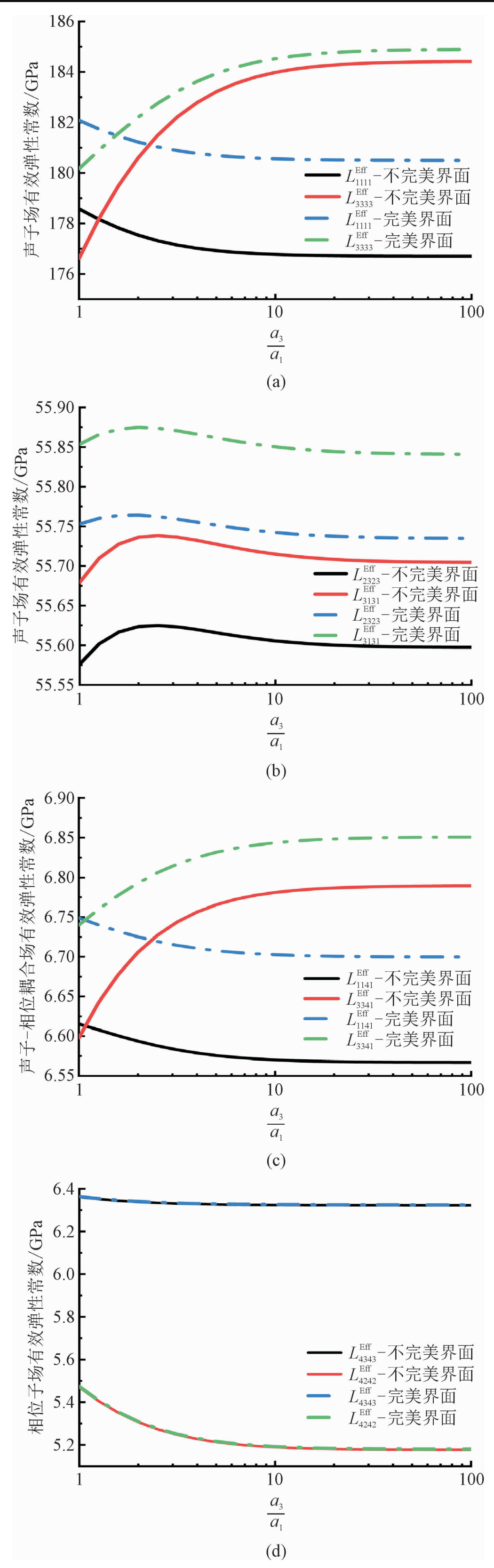


图 3　声子场、相位子场和声子-相位耦合场有效弹性常数随夹杂长径比的变化

Fig. 3　The variation of effective elastic constants of phonon field, phason field, and phonon-phason coupling field with the aspect ratio of inclusions

从图中可以看出,随着夹杂长径比的增大, L_{1111}^{Eff} 增大,而 L_{3333}^{Eff} 减小,在 $a_3/a_1 \geqslant 10$ 后,有效弹性常数的值趋于稳定。L_{2323}^{Eff} 和 L_{3131}^{Eff} 变化趋势是相同的,都是随着夹杂长径比增大呈现先增大后减小的趋势,当 $a_3/a_1 \geqslant 10$ 时,曲线较为平缓。

图 3(c)给出了声子-相位耦合场有效弹性常数随夹杂长径比变化的曲线。如图所示,随着夹杂长径比的增大, L_{1141}^{Eff} 显著增大,而 L_{3341}^{Eff} 呈现减小的趋势,当 $a_3/a_1 \geqslant 10$ 后,有效弹性常数的变化幅度不明显。

图 3(d)表示相位子场有效弹性常数随夹杂长径比变化的趋势。随着夹杂长径比的增大, L_{4343}^{Eff} 增幅并不明显,曲线较为平缓,而 L_{4242}^{Eff} 随夹杂长径比的增加逐渐递减,这说明夹杂的形状对准晶复合材料相位子场有效弹性常数的影响较小。

总之,准晶声子场、相位子场和声子-相位耦合场有效弹性常数均会受到夹杂长径比的影响,在 $a_3/a_1 \geqslant 10$ 后,一维正交准晶复合材料有效弹性常数的变化趋于稳定。比较在不完美界面和完美界面的情况下 2 条有效弹性常数的曲线,可以发现不完美界面的存在降低了有效弹性常数的数值。

图 4(a)~图 4(b)体现了夹杂体积分数对声子场有效弹性常数的影响。在这种情况下,假设夹杂的长径比为 1,夹杂半径为 500μm ,界面的厚度为 0.02μm 。因此,在这种情况下考虑的夹杂形状是球体。由图可知,随着夹杂体积分数的增大, L_{1122}^{Eff} 与 L_{1133}^{Eff} 变化显著且具有一致的变化规律, L_{3131}^{Eff} 与 L_{1212}^{Eff} 均随着夹杂体积分数的增大而单调递减。

图 4(c)为声子-相位耦合场有效弹性常数随夹杂体积分数的变化趋势图。如图所示, L_{2342}^{Eff} 与 L_{3143}^{Eff} 均随着夹杂体积分数的增大而减小,具有相同的变化趋势,并且有效弹性常数值变化剧烈。

图 4(d)呈现了相位子场有效弹性常数与夹杂体积分数的关系。随着夹杂体积分数的增加, L_{4343}^{Eff} 与 L_{4141}^{Eff} 均呈现单调递减的趋势,可见夹杂体积分数对相位子场有效弹性常数具有显著的影响。

综上所述,当夹杂的体积分数逐渐趋近于 0 时,准晶复合材料的有效弹性常数近似于基体的弹性常数。随着夹杂的体积分数逐渐增大趋近于 1 时,准晶复合材料的有效弹性常数将逐渐逼近夹杂的弹性常数。

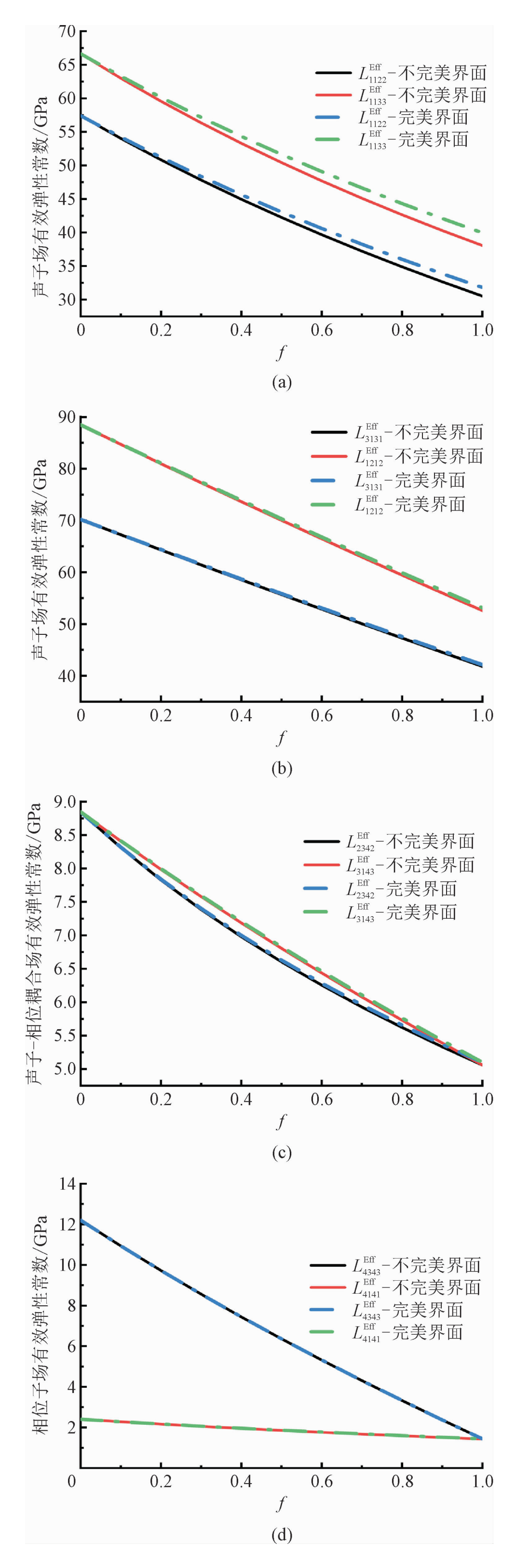


图 4 声子场、相位子场、声子-相位耦合场有效弹性常数随夹杂体积分数的变化

Fig. 4 The variation of effective elastic constants of phonon field, phason field, and phonon-phason coupling field with the volume fraction of inclusions

4 结　论

本研究分析了含有弹簧型不完美界面的一维正交准晶复合材料有效弹性性能。基于 Mori-Tanaka 理论和弹簧型不完美界面的假设,求解出了声子场、相位子场与声子-相位耦合场的有效弹性常数。本研究给出了含弹簧型不完美界面的一维正交准晶复合材料的数值算例,结果表明,考虑不完美界面的准晶复合材料有效弹性常数会受到夹杂长径比与体积分数的影响,弹簧型不完美界面的存在使准晶复合材料的有效弹性常数减小。

参考文献:

[1] SHECHTMAN D,BLECH I,GRATIAS D,et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. Physical review letters,1984,53(20):1951-1954.

[2] 范天佑. 准晶数学弹性理论及应用[M]. 北京:北京理工大学出版社,1999.

[3] 王仁卉,胡承正,桂嘉年. 准晶物理学[M]. 北京:科学出版社,2004.

[4] 陈敬中. 准晶结构及对称新理论[M]. 北京:科学出版社,2013.

[5] WANG Y B,GUO J H. Effective electroelastic constants for three-phase confocal elliptical cylinder model in piezoelectric quasicrystal composites[J]. Applied mathematics and mechanics, 2018, 39(6):797-812.

[6] 刘有延,傅秀军,黄秀清. 一维准晶物理性质[J]. 物理学进展,1997,17(1):1-23.
LIU Youyan,FU Xiujun,HUANG Xiuqing. The physical properties ofone-dimensional quasilattices[J]. Progress in physics, 1997, 17(1):1-23(in Chinese).

[7] DUBOIS J M. So useful,those quasicrystals[J]. Israel journal of chemistry,2011,51(11/12):1168-1175.

[8] 胡承正,杨文革,王仁卉,等. 准晶的对称性和物理性质[J]. 物理学进展,1997,17(4):345-375.
HU Chengzheng,YANG Wenge,WANG Renhui,et al. Quasicrystal symmetry and physical properties[J]. Progress in physics,1997,17(4):345-375(in Chinese).

[9] FAN C Y,YUAN Y P,PAN Y B,et al. Analysis of cracks in one-dimensional hexagonal quasicrystals with the heat effect[J]. International journal of solids and structures,2017,120:146-156.

[10] 杜昕鲲,丁生虎. 热电材料中含椭圆夹杂问题的精确解[J]. 数学的实践与认识,2019,49(17):213-218.
DU Xinkun,DING Shenghu. Exact solutions of elliptical inclusion in thermoelectric materials[J]. Mathematics in practice and theory,2019,49(17):213-218(in Chinese).

[11] 汪文帅,袁宏婷. 一维正方准晶中裂纹和刚性线夹杂的封闭形式解(英文)[J]. 应用数学,2019,32(3):715-728.
WANG Wenshuai,YUAN Hongting. Closed-Form solutions to the crack and/or rigid line inclusion in 1D orthorhombic quasicrystals[J]. Mathematica applicata,2019,32(3):715-728(in Chinese).

[12] 皮建东,周彦斌,刘官厅. 一维六方准晶压电材料含运动螺型位错弹性问题分析[J]. 应用力学学报,2021,38(1):388-395.
PI Jiandong, ZHOU Yanbin, LIU Guanting. Analysis of motion screw dislocation elasticity problem in one-dimensional piezoelectric hexagonal quasicrystals[J]. Chinese journal of applied mechanics,2021,38(1):388-395(in Chinese).

[13] LI L H,LIU G T. Study on a straight dislocation in an icosahedral quasicrystal with piezoelectric effects[J]. Applied mathematics and mechanics,2018,39(9):1259-1266.

[14] 翟婷. 准晶材料圆形夹杂的界面缺陷问题[D]. 银川:宁夏大学,2021.

[15] LI S,LI L H. Effective elastic properties of one-dimensional hexagonal quasicrystal composites[J]. Applied mathematics and mechanics,2021,42(10):1439-1448.

[16] 张亮亮. 含压电效应的一维准晶平面问题的理论研究及应用[D]. 北京:中国农业大学,2015.

[17] FAN T. Mathematical theory of elasticity of quasicrystals and its applications[M]. Heidelberg:Springer,2011.

[18] SLADEK J,SLADEK V,PAN E. Bending analyses of 1D orthorhombic quasicrystal plates[J]. International journal of solids and structures,2013,50(24):3975-3983.

[19] 赵雪芬,李星. 一维正方准晶非周期平面弹性有限摩擦接触问题[J]. 力学季刊,2019,40(1):183-192.
ZHAO Xuefen,LI Xing. The frictional contact problem for aperiodical plane in one-dimensional orthorhombic quasicrystals[J]. Chinese quarterly of mechanics,2019,40(1):183-192(in Chinese).

[20] 张之国. 一维和二维准晶中位错与夹杂问题及接触问题研究[D]. 银川:宁夏大学,2021.

[21] 翟婷,赵雪芬,丁生虎. 含界面裂纹圆形夹杂的十二次对称二维准晶热应力分析[J]. 工程数学学报,2022,39(2):209-223.
ZHAI Ting,ZHAO Xuefen,DING Shenghu. Thermal stress analysis for interface cracks between dodecagonal two-dimensional symmetric quasicrystals and circular elastic inclusion[J]. Chinese journal of engineering mathematics,2022,39(2):209-223(in Chinese).

[22] GUO J H,ZHANG Z Y,XING Y M. Antiplane analysis for an elliptical inclusion in 1D hexagonal piezoelectric quasicrystal composites[J]. Philosophical magazine,2016,96(4):349-369.

[23] GAO Y,RICOEUR A. Three-dimensional analysis of a spheroidal inclusion in a two-dimensional quasicrystal body[J]. Philosophical magazine,2012,92(34):4334-4353.

[24] KOUTSAWA Y. New micromechanics approaches for the effective properties of multiferroics composites with spring-type imperfect in-

terfaces[J]. Composite structures,2019,211:41-55.

[25] KOUTSAWA Y. Overall thermo-magneto-electro-elastic properties of multiferroics composite materials with arbitrary heterogeneities spatial distributions[J]. Composite structures, 2015, 133: 764-773.

[26] BUDIANSKY B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 1965, 13(4):223-227.

[27] HILL R. A self-consistent mechanics of composite materials[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 1965, 13(4):213-222.

[28] WANG Z, ZHU J, JIN X Y, et al. Effective moduli of ellipsoidal particle reinforced piezoelectric composites with imperfect interfaces[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2014, 65: 138-156.

(编辑 张璐)

附 录

在一维正交准晶中嵌入杆状夹杂（$a_1 = a_2 = a, a_3 \to \infty$），内点极化张量 $\boldsymbol{T}_{iAjB}$ 的解析解为

$$T_{1111} = T_{2222} = -\frac{-7C_{11}^0 + C_{12}^0}{4a^4},\ T_{1212} = -\frac{-3C_{11}^0 + C_{12}^0}{30a^4},$$

$$T_{1122} = T_{2211} = \frac{C_{11}^0 + C_{12}^0}{30a^4},\ T_{2323} = \frac{3C_{44}^0 + C_{55}^0}{15a^4},$$

$$T_{1331} = \frac{C_{44}^0 + 3C_{55}^0}{15a^4},\ T_{4141} = \frac{3K_1^0 + K_2^0}{15a^4},\ T_{4242} = \frac{K_1^0 + 3K_2^0}{15a^4},$$

$$T_{1314} = T_{1413} = \frac{R_5^0 + 3R_6^0}{30a^4},\ T_{2324} = T_{2423} = \frac{3R_5^0 + R_6^0}{30a^4}$$

在一维正交准晶中嵌入杆状夹杂（$a_1 = a_2 = a, a_3 \to \infty$），界面张量 $\boldsymbol{R}_{iAjB}$ 的解析解为

$$R_{1111} = R_{2222} = \frac{15C_{11}^0 h\pi - 9C_{12}^0 h\pi}{32aC_{11}^0 C_{11}^0 - 32aC_{11}^0 C_{12}^0},$$

$$R_{1122} = R_{2211} = -\frac{3h\pi(C_{11}^0 + C_{12}^0)}{32aC_{11}^0(C_{11}^0 - C_{12}^0)}, R_{1313} = R_{1331} = \frac{3h\pi}{32aC_{44}^0},$$

$$R_{2323} = R_{2332} = \frac{3h\pi}{16a(C_{44}^0 + \sqrt{C_{44}^0 C_{55}^0})}, R_{1414} = \frac{3h\pi}{4a(\sqrt{K_1^0} + \sqrt{K_1^0 K_2^0})},$$

$$R_{1212} = R_{1221} = \frac{9C_{11}^0 h\pi - 3C_{12}^0 h\pi}{32aC_{11}^0 - 32aC_{11}^0 C_{12}^0}, R_{2424} = \frac{3h\pi}{4a(\sqrt{K_1^0 K_3^0} + K_3^0)}$$